3-1 SUJET DE MATHÉMATIQUES

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

Le premier exercice, d'analyse, porte sur la résolution d'une équation différentielle et l'étude d'une solution particulière.

Le deuxième exercice, de géométrie, permet d'étudier des aires de triangles grâce aux nombres complexes.

Le problème, d'analyse, est l'étude de l'approximation d'une fonction par une suite de fonctions polynomiales

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIER EXERCICE

On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit *(E)* l'équation différentielle $x^2 f'' + x f' + f = 0$, où f désigne une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1-

a. On pose $x = e^t$ et $u(t) = f(e^t)$. Démontrer que f est solution de *(E)* si et seulement si u est solution de l'équation $u'' + u = 0$. En déduire les solutions de *(E)*.

b. Déterminer la solution particulière de *(E)* qui vérifie les conditions particulières $f(1) = 1,\ f'(1) = -1$.

2-

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$g(x) = \cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x))$$

et soit C_g sa courbe représentative dans $\mathcal{P}$.

a. Trouver A et α ($A \in \mathbb{R}^*_+$ et $\alpha \in [0\ ,\ 2\pi[$) tels que, pour tout x :

$$g(x) = A\cos(\ln(x) + \alpha).$$

b. En déduire que, pour tout x strictement positif, on a $|g(x)| \leq \sqrt{2}$.

3-

a. Déterminer l'ensemble des points de C_g situés sur l'axe des abscisses.

b. Montrer que les tangentes à C_g en ces points passent toutes par l'un ou l'autre de deux points que l'on déterminera.

4-

Pour tout x strictement positif, on pose :

$$I(x) = \int_1^x \cos(\ln(t))\,dt \text{ et } J(x) = \int_1^x \sin(\ln(t))\,dt.$$

Vérifier que l'on a : $I(x) - J(x) = x\cos(\ln(x))$-1. En déduire une primitive de g.

5-

On pose, pour tout entier relatif k, $b_k = \exp\left(\frac{\pi}{4} - k\pi\right)$.

a. Démontrer que, sur l'intervalle $]b_{k+1}, b_k[$, la fonction g a le même signe que $(-1)^k$.

Donner une interprétation géométrique des nombres :

$$u_k = \int_{b_{k+1}}^{b_k} g(t)\,dt \text{ et } s_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k u_k.$$

b. Donner une expression simplifiée de s_n en fonction de n. Déterminer $\lim_{n\to\infty} s_n$ et en donner une interprétation géométrique.

DEUXIEME EXERCICE

Définitions et notations

On désigne par □ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

□ désigne le corps des nombres complexes.

Pour tout $z \in$ □ , on note respectivement $\bar{z}$, Re(z), Im(z) son conjugué, sa partie réelle et sa partie imaginaire.

M(z) désigne le point de □ d'affixe z. □(*u*) désigne le vecteur d'affixe u. $S_{/PQ}$ désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite (PQ).

1-

Dans cette question, on établit une formule donnant la mesure $f(u,v)$ de l'aire algébrique du triangle de sommets A, B, C d'affixes respectifs a, b, c en fonction des affixes respectifs $u = b - a$ et $v = c - a$ des vecteurs □ = □ et □ = □. Par convention, la valeur de l'aire est positive lorsque les sommets A, B et C, pris dans cet ordre, sont dans le sens direct ; la valeur de l'aire est négative dans le cas contraire. On procède par conditions nécessaires.

a) Calculer $f(1,i)$.

b) Justifier la relation $f(v,u) = -f(u,v)$ pour u, v quelconques.

c) Justifier la relation $f(wu,wv) = w\,\overline{w}\,f(u,v)$, pour u, v, w quelconques.

d) Justifier la relation $f(u,\, t_1v_1 + t_2v_2) = t_1\,f(u,v_1) + t_2\,f(u,v_2)$ pour u, v_1, v_2 quelconques et t_1, t_2 réels.

e) Prouver que $f(u,v) = \dfrac{1}{4i}\left(\overline{u}\,v - u\,\overline{v}\right)$.

2-

Soit □ la droite de □ passant par le point P d'affixe p, orthogonale au vecteur □ d'affixe n. Soient z et z' les affixes respectifs de deux points M et M' symétriques par rapport à la droite □ .

Montrer la relation: $\overline{n}\,z' = \overline{n}\,p - n\,\overline{z} + n\,\overline{p}$.

3-

Dans cette question et dans la suivante, les points A et B ont pour affixes respectifs 1+i et 2. Soient M_1, M_2, M_3 les symétriques respectifs de M d'affixe z, par rapport aux droites (OB), (OA), (AB).

a) Déterminer en fonction de z les affixes z_1 , z_2 , z_3 de M_1 , M_2 , M_3 .

b) Montrer que, pour que l'aire du triangle $M_1\,M_2\,M_3$ soit égale en valeur absolue à celle du triangle OAB, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\left|\overline{z} + z - z\,\overline{z}\right| = 1 .$$

4-

Construire sur une même figure le triangle OAB et l'ensemble (□) des points dont l'affixe satisfait à la condition $\left|\overline{z} + z - z\,\overline{z}\right| = 1$.

PROBLEME

Les différentes parties de ce problème peuvent être traitées séparément. On pourra admettre les résultats des parties précédentes.

On associe à tout entier naturel n non-nul et à toute fonction numérique f de classe $\mathbf{C}^2$ sur [0 , 1], la fonction polynôme, notée f_n , définie, pour tout réel x appartenant à [0 , 1], par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \; f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad (1)$$

avec $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

PARTIE I

Résultats préliminaires

Montrer que, pour tout réel x appartenant à [0 , 1], on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, k \, x^k (1-x)^{n-k} = nx \, .$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, k(k-1) \, x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \, .$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, (k - n\,x)^2 \, x^k (1-x)^{n-k} = n\,x(1-x) \, .$$

PARTIE II

Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on considère la fonction numérique f définie sur [0 , 1] par :

$$f(x) = x^2 \, .$$

On appelle f_n la fonction polynôme associée à f par la relation (1).

1- Déterminer f_n.

2- Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} \left(\left| f_n(x) - f(x) \right| \right) = \frac{1}{4n} \, .$$

PARTIE III

Convergence de $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Dans toute la suite du problème, on désigne par f une fonction numérique quelconque de classe $\mathbf{C}^2$ sur [0 , 1] ; pour tout entier naturel non-nul n, f_n désigne la fonction polynôme associée à f par la relation (1).

On note, pour k entier naturel appartenant à [0 , n] :

$$I_n(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \mathrm{d}x \, .$$

1- a. Déterminer, pour k appartenant à [0 , n-1], une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

b. En déduire $I_n(k)$ pour k appartenant à [0 , n].

2- a. Calculer, en fonction de f :

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \, .$$

b. Déterminer, après avoir justifié son existence, la limite quand n tend vers l'infini de :

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \, .$$

PARTIE IV

Convergence de la suite (f_n) vers f sur *[0 , 1]*

1- a. Montrer qu'il existe un réel M_0 vérifiant :

$$M_0 = \operatorname{Sup}_{x\in[0,1]} \left(\left|f(x)\right|\right).$$

b. Montrer qu'il existe un réel positif M_1 tel que, pour tout réel x appartenant à [0 , 1] et tout réel x' appartenant à [0 , 1], on a :

$$\left|f(x') - f(x)\right| \leq M_1 \left|x' - x\right|.$$

2- En déduire que, pour tout réel α strictement positif, pour tout réel x appartenant à [0 , 1] et tout réel x' appartenant à [0 , 1], on a :

$$\left|f(x') - f(x)\right| \leq M_1\alpha + \frac{2M_0}{\alpha^2}(x' - x)^2.$$

Indication : on pourra distinguer deux cas : $|x' - x| \leq \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$.

3- a. Montrer que, pour tout réel α strictement positif, pour tout réel x appartenant à [0 , 1], on a :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq M_1\alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}.$$

b. Pour n fixé, on pose :

$$\delta(n) = \operatorname{Min}_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}\left(M_1\alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}\right).$$

Montrer que $\delta(n)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\delta(n) = \frac{\beta}{\sqrt[3]{n}} \text{ avec } \beta \text{ indépendant de } n.$$

4- En déduire, pour tout réel x appartenant à [0 , 1] :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

3-2 EPREUVE DE MATHEMATIQUES DU CAPLP EXTERNE SESSION 2003
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

PREMIER EXERCICE

QUESTION 1

a) Il s'agit de résoudre l'équation différentielle (E) à l'aide du changement de variable défini par : $x=e^t$.

Une première possibilité : dans l'équation (E) f ' et f '' désignent les dérivées de f par rapport à la variable x ;

$\forall x \in IR_+^*$ $f(x)= u(\ln x)$ donc $f'(x)= u'(\ln x) \times \frac{1}{x}$, et $f''(x)= u''(\ln x)\times\frac{1}{x}\times\frac{1}{x} - u'(\ln x)\times \frac{1}{x^2}$

D'où sur IR_+^* : $x^2f'' + xf' + f = 0 \iff [u''(\ln x) - u'(\ln x)] + u'(\ln x) + u(\ln x) = 0$

$\iff u''(\ln x) + u(\ln x) = 0$.

Et puisque ln(x) décrit $\mathbb{R}$ lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$:

(E) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $u''(t) + u'(t) = 0 \Leftrightarrow$ u est solution de $u'' + u = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Une deuxième possibilité :

puisque sur $\mathbb{R}$ $u(t) = f(e^t)$, $u'(t) = f'(e^t) \times e^t$ et $u''(t) = f''(e^t) \times e^t + f'(t) \times e^t$;

d'où sur $\mathbb{R}$ $u''(t) + u(t) = e^{2t} f''(e^t) + e^t f'(e^t) + f(e^t) = x^2f''(x) + xf'(x) + f(x)$.

quand t décrit $\mathbb{R}$, x décrit $\mathbb{R}_+^*$; d'où $\forall t \in \mathbb{R}$ $u''(t) + u(t)$ <=> (E) .

b) Les solutions de $u'' + u = 0$ sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

t->B cos(t) + C sin(t), où A et B sont des réels quelconques.

Puisque $x= e^t$: les solutions de (E) sont les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

x-> Bcos((ln x) + C sin(ln x) .

Il reste à déterminer A et B pour que $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$;

ce qui donne B=1 et C=-1 et **f(x) = cos((ln x) - sin(ln x)** .

QUESTION 2

a) Il s'agit de réduire l'expression de f(x) ; un procédé classique pour réduire Bcos(a) + Csin(a), consiste à mettre $\sqrt{B^2+C^2}$ en facteur ;

ce qui donne ici : $g(x) = \sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos (\ln x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin (\ln x))$

$= \sqrt{2} (\cos \frac{\Pi}{4} \cos (\ln x) - \sin \frac{\Pi}{4} \sin (\ln x)) = \sqrt{2} \cos [(\ln x) + \frac{\Pi}{4}]$.

On choisit donc **$A= \sqrt{2}$ et $\alpha = \frac{\Pi}{4}$.**

b) Puisque |cos| est majoré par 1, nous obtenons bien que **|g(x)| est majoré par $\sqrt{2}$.**

QUESTION 3

a) Chercher les points de C_g situés sur l'axe des abscisses revient à chercher les x de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant g(x) = 0, ce qui donne comme condition nécéssaire et suffisante: lnx de la forme $\frac{\pi}{4} - k\pi$, soit encore x de la forme $e^{\frac{\pi}{4}-k\pi}$.

Donc les points cherchés sont les points M_k d'ordonnées nulle et d'abscisses $e^{\frac{\pi}{4}-k\pi}$, k désignant un entier relatif quelconque. Dans la suite $e^{\Pi/4- k \Pi}$ sera noté b_k , en accord avec l'énoncé.

b) La tangente au point M_k a pour coefficient directeur $g'(b_k)$, soit $\frac{-\sqrt{2}}{b_k}\sin(\ln b_k + \frac{\Pi}{4}) \times \frac{1}{b_k}$ ou encore $\frac{-\sqrt{2}}{b_k}(-1)^k$

. D'où l'équation de la tangente en M_k : $y - 0 = \frac{-\sqrt{2}}{b_k}(-1)^k (x-b_k)$;

l'ordonnée à l'origine est donc $\sqrt{2}(-1)^{k+1}$; il en résulte que cette tangente coupe l'axe des abscisses en l'un des deux points d'ordonnées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, suivant la parité de k.

QUESTION 4

Première possibilité :
Dériver I-J et retrouver g ;
Deuxième possibilité :
Pour x > 0 : l'intégration par parties de I(x) en prenant u(t) = t et v(t) = cos(ln t) donne :

$I(x) = [\, t\cos(\ln t)\,]_1^x - \int_1^x \sin(\ln t)\,dt = x\cos(\ln(x)) - 1 + J(x)$; et $I(x) - J(x) = x\cos(\ln(x)) - 1$.

Pour x > 0 : $I(x) - J(x) = \int_1^x [\cos(\ln t) - \sin(\ln t)]dt = \int_1^x g(t)\,dt$;

d'où **I – J est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.**

QUESTION 5
a)Une première possibilité :
Sur $]b_{k+1}, b_k[$: g garde un signe constant puisqu'elle est continue et que les b_k sont les zéros de g.
Un test en $e^{-k\Pi}$ donne pour g la valeur $(-1)^k$; d'où le résultat.

Une deuxième possibilité :

$g(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(\ln x + \frac{\Pi}{4}) > 0 \Leftrightarrow \ln x + \frac{\Pi}{4} \in]-\frac{\Pi}{2}+2l\Pi, +\frac{\Pi}{2}+2l\Pi[\Leftrightarrow x \in]b_{2l+1}, b_{2l}[$;

d'où g est bien du signe de $(-1)^k$ sur $]b_{k+1}, b_k[$.
u_k représente ce qu'on appelait avant l'aire algébrique délimitée par la courbe C_g , l'axe des abscisses, et les deux parallèles à l'axe des ordonnées contenant les points d'abscisses b_{k+1} et b_k .

Pour $(-1)^k u_k$ c'est plus simple : c'est l'aire du domaine délimitée par la courbe C_g , l'axe des abscisses, et les deux parallèles à l'axe des ordonnées contenant les points d'abscisses b_{k+1} et b_k .

Et pour S_n c'est l'aire du domaine délimité par la courbe C_g , l'axe des abscisses, et les deux parallèles à l'axe des ordonnées contenant les points d'abscisses b_{n+1} et b_0 .

b) Compte tenu du fait que I-J est une primitive de g , $u_k = b_k\cos(\ln b_k) - b_{k+1}\cos(\ln b_{k+1})$

$= b_k(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2} - b_{k+1}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2} = (-1)^k e^{k\Pi}\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-k\Pi}(1+e^{-\Pi})$.

Donc s_n est la somme partielle d'une série géométrique de raison $(-e^{-\Pi})$:

$$\mathbf{S_n = e^{k\Pi}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+e^{-\Pi})\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)\Pi}}{1+e^{-\Pi}}}.$$

Et puisque $|-e^{-\Pi}| < 1$, **la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$ est $e^{k\Pi}\frac{\sqrt{2}}{2}$.**

Interprétation géométrique : l'aire du domaine délimité par la courbe C_g, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la parallèle à cet axe contenant le point d'abscisse $e^{-\frac{\pi}{4}}$ est : $\mathbf{e^{k\Pi}\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

DEUXIEME EXERCICE

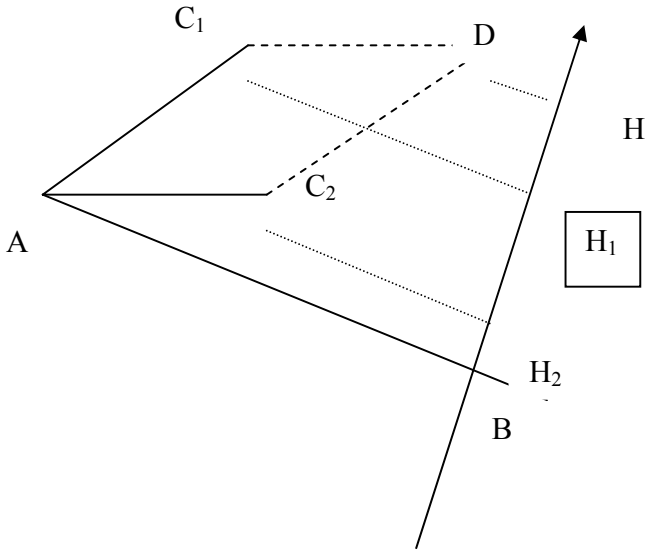
QUESTION 1

a) $f(1,i) = \frac{1}{2}$ car le triangle a ses côtés définis par ($\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$), qui forme un repère orthonormé direct.

b) f(v,u) = - f(u,v) car l'échange de u et v ne change pas le triangle, mais uniquement son orientation.

c) Soit un OAB triangle associé à (u,v) ; c'est-à-dire que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{U}(u)$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{U}(v)$.
Le triangle OA'B' transformé du précédent par la similitude directe de centre O et associée au nombre complexe w , est associé à (wu,wv). La similitude directe ne change pas le sens du triangle ; d'autre part son rapport étant |w| l'aire du triangle est multipliée par $|w|^2$; d'où : **f(wu,wv) = $|w|^2$ f(u,v) = w $\overline{w}$ f(u,v).**

d) Montrons d'abord que : $f(u, v_1+v_2) = f(u,v_1) + f(u,v_2)$:
les trois triangles peuvent être choisis ayant tous un côté en commun (AB) ; correspondant au nombre complexe u ;



donc ce qui va déterminer $f(u, v_1+v_2)$, $f(u,v_1)$ et $f(u,v_2)$, ce sont les hauteurs des trois triangles ABD, ABC_1 et ABC_2 , ou plus exactement, puisqu'il faut tenir compte de l'orientation, leurs projections orthogonales sur un axe directement perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$; une projection étant une application linéaire on a : $f(u, v_1+v_2) = f(u,v_1) + f(u,v_2)$.

Il reste à démontrer que f(u , tv) = t f(u , v) ; multiplier v par t, se traduit géométriquement par multiplier par t la projection orthogonale de la hauteur ; d'où l'égalité voulue.

En combinant les c) et d) , on conclue à la bilinéarité de f.

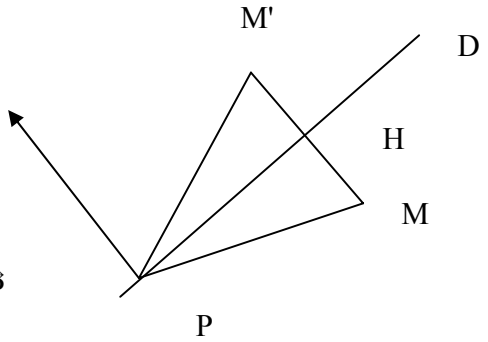
e) avec des notations allant de soi, et en utilisant les propriétés précédentes:

f(u , v) = f(a+ib , c+id) = f(a,c) + (ad-bc) f(1,i) + f(ib,id) = $\frac{1}{2}$ (ad-bc) car a et c sont associés à deux côtés portés par une même droite, donc f(a,c)=0 ; et de même pour ib et id.

Le développement de ($\overline{u}v - u\overline{v}$) donne 2i(ad-bc) ; d'où **: f(u,v) = $\frac{1}{4i}$ ($\overline{u}v - u\overline{v}$).**

Remarquons que la formule $f(u,v) = \frac{1}{2}$(ad-bc) aurait pu servir de point de départ pour la résolution de cet exercice, puisque $\frac{1}{2}$ (ad-bc) représente la moitié du déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$, qui est bien la demi-aire algébrique du parallélogramme défini par ces deux vecteurs.

QUESTION 2



$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MH}$

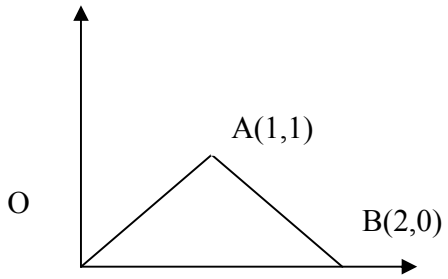
$= 2\,(\overrightarrow{MP}.\frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|})\frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$

car $\overrightarrow{MH}$ est la projection de $\overrightarrow{MP}$ sur la droite passant par P et dirigée par $\overrightarrow{N}$.

D'autre part pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}(a+ib)$ $\overrightarrow{v}(c+id)$:
$(a-ib)(c+id)+(a+ib)(c-id) = 2(ac+bd) = 2\ \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.

or: $z'-z = ((\overline{p-z})\,n + (p-z)\,\bar{n})\frac{n}{|n|^2}$; donc nous avons bien : $\bar{n}z' = \bar{n}p - n\bar{z} + n\bar{p}$ **.**

QUESTION 3



a) $z_1 = \bar{z}$

Pour trouver z_2, nous pouvons utiliser ce qui précède avec p= 0 et n=1-i ;
pour z_3 nous prendrons p=2 et n=1+i ;
il vient **:** $z_2 = -\frac{1-i}{1+i}\bar{z}$ **et** $z_3 = 2 + \frac{1+i}{1-i}\bar{z}$

b) l'aire A du triangle $M_1M_2M_3$ peut être calculée à l'aide de $|f(z_3-z_1\ ,\ z_2-z_1)|$:

$(\overline{z_3-z_1})(z_2-z_1) = \frac{4}{(1+i)^2}(2-z)\,\bar{z} = \frac{4}{2i}(2-z)\,\bar{z} = -2i\,(2-z)\,\bar{z}$ et $(z_3-z_1)(\overline{z_2-z_1}) = 2i\,(2-\bar{z})z$

d'où $A = \frac{1}{4}|-4i\,(\bar{z}+z) + 4i\,z\bar{z}| = |\,(\bar{z}+z) - z\bar{z}|$ **.**

L'aire de OAB étant égale à 1, la condition nécessaire et suffisante cherchée est :

$|\,\bar{z}+z - z\bar{z}| = 1$ **.**

QUESTION 4

En prenant z = x+iy, la CNS précédente devient : $2x - x^2 - y^2 = 1$;

$2x - x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 0$ qui n'est vérifiée que par le milieu C de OB,
et $2x - x^2 - y^2 = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2$, qui est l'équation du cercle de centre C et de rayon $\sqrt{2}$.
L'ensemble cherché est donc : $\{C\}$.

PROBLEME

PARTIE I

Introduisons la fonction g de [0 , 1] dans ▫ , qui à t associe $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (t\,x)^k (1-x)^{n-k}$ qui est égal d'après la formule du binôme à $(t\,x+1-x)^{n.}$

nx (tx+1-x)$^{n-1}$ = g'(t) = $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$; le terme pour k=0 peut être rajouté puisqu'il est nul.

Et n(n-1)x²(tx+1-x)$^{n-2}$ = g''(t) = $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1) t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$

les termes pour k=0 et k=1 peuvent être rajoutés puisqu'ils sont nuls.

D'où : n x = g'(1) = $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k\, x^k (1-x)^{n-k}$ et n (n–1) x^2 = g''(1) = $\sum_{k=2}^{n} C_n^k k\,(k-1) x^k (1-x)^{n-k}$

On obtiendra la troisième égalité en remarquant que g(1) = 1 et en utilisant l'égalité (k-nx)² = n² x² + (1-2nx) k + k(k-1), (que l'on peut voir comme une décomposition d'un polynôme du second degré en k, suivant la base 1, k , k(k-1)).

PARTIE II

1) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k [k(k-1)+k] x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2}[n(n-1)x^2 + nx] = \frac{(n-1)x+1}{n}$ ce qui répond à la question.

2) Pour x appartenant à [0 , 1] : $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|1-x^2|}{n}$; une étude rapide montre que 1-x² décrit l'intervalle [0 , $\frac{1}{4}$] ; d'où $|f_n(x) - f(x)|$ décrit l'intervalle [0 , $\frac{1}{4n}$] et sa borne sup est bien $\frac{1}{4n}$

PARTIE III

1) a)Pour k appartenant à [0 , n-1],

$I_n(k+1) = \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1} dx = \left[x^{k+1}(-1)(1-x)^{n-k}\right]_0^1 + \int_0^1 (k+1)x^k \frac{(1-x)^{n-k}}{n-k} dx$

(en utilisant une intégration par parties telle que U=x^{k+1} et V'= (1-x)$^{n-k-1}$). Finalement : $I_n(k+1) = \frac{k+1}{n-k} I_n(k)$.

b)$In(0) = \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$; en réitérant la relation établie au a), il vient : $In(k) = \frac{1}{(n+1)C_n^k}$

2) a) $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}\right] dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) \frac{1}{(n+1)C_n^k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$. Utilisons une approximation de $\int_0^1 f(x)dx$ par les sommes de Riemann, obtenues en découpant [0 , 1] en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$

$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n}{n+1} S_n + \frac{1}{n+1} f(0)$; comme f est continue sur [0 , 1], S_n tend vers $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque n tend vers + ∞. Il en résulte que $\int_0^1 f_n(x)dx$ a pour limite $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque n tend vers +∞ .

PARTIE IV

1) a) f étant continue sur le segment [0 , 1], |f| l'est aussi ; l'existence de M_0 en résulte.
b) f étant C^1 sur le segment [0 , 1], f ' est continue sur ce segment ; désignons par M_1 la borne supérieure de |f '| sur [0 , 1]. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout x et tout x' de [0 , 1] : $|f(x) - f(x')| \square M_1 |x-x'|$.

2) supposons $|x-x'| \square \alpha$: d'après 1)b) $|f(x) - f(x')| \square M_1 \alpha$.

Si maintenant $|x-x'| > \alpha$ $|f(x) - f(x')| \square |f(x)|+|f(x')| \square 2 M_0 \square 2 M_0 \left(\frac{|x-x'|}{\alpha}\right)^2$;

donc dans tous les cas $|f(x) - f(x')| \square M_1 \alpha + 2 M_0 \left(\frac{|x-x'|}{\alpha}\right)^2$.

3) a) fixons x dans [0 , 1] :

$$|f_n(x)-f(x)| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(M_1\alpha + \frac{2M_0}{\alpha^2}\left|x-\frac{k}{n}\right|^2 \right) x^k (1-x)^{n-k} \mid$$

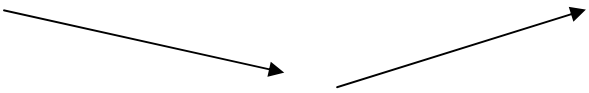
$\leq M_1\alpha \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M_0}{\alpha^2}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$ et puisque la première somme est égale à 1, que la seconde est égale à nx(1-x), et en tenant compte de $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, nous en concluons que cas

$|f_n(x) - f(x)| \square M_1 \alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}$.

b) Nous pouvons étudier la fonction h qui à α appartenant à □ □ associe

$h(\alpha)=M_1 \alpha + \frac{M_0}{2n\alpha^2}$: $h'(\alpha)=M_1 - \frac{M_0}{n\alpha^3}$

α	0		a		+∞
h'(α)		–	0	+	
h(α)		↘		↗	



avec $a = \left(\frac{M_0}{nM_1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; donc le minimum δ(n) est égal à $n^{-1/3}(M_0^{1/3}M_1^{2/3} + M_1^{1/3}M_0^{2/3})$ qui est bien de la forme $\frac{\beta}{n^{1/3}}$, où β est bien indépendant de n.

4) du 3)a) et du 3)b) il résulte que pour x appartenant à [0 , 1], $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\beta}{n^{1/3}}$ dont la limite lorsque n tend vers +∞ est 0. D'où la limite lorsque n tend vers +∞ de $f_n(x)$ est f(x).